ЖСТ МЕХАНИКАСЫНЫҢ ТАҢДАУЛЫ ТАРАУЛАРЫ

Лекция 8_Ньютон механикасындағы векторлық элементтер. Квази-Кеплер есебі

Бұл тақырып тек физикада ғана емес, сонымен қатар астродинамика, ғарыш ғылымдары және инженерлік қолданбаларды қоса алғанда, көптеген басқа салаларда маңызды зерттеулерге негіз болып табылады. Бұл лекцияда біз механиканың екі негізгі аспектілері - векторлық элементтер және квази-кеплер мәселесін тереңірек қарастырамыз.

Ньютон механикасы дегеніміз не? Ньютон механикасы — 17 ғасырда Исаак Ньютон жасаған физиканың іргелі саласы. Ол күш, масса және үдеу сияқты іргелі ұғымдарды пайдалана отырып, объектілердің қозғалысын және олардың арасындағы өзара әрекеттесуді сипаттайды. Ньютон классикалық механиканың негізін құрайтын және физикалық әлемді түсіну үшін өзекті және маңызды болып қалатын қозғалыстың үш заңын тұжырымдады.

Ньютон механикасындағы векторлық элементтер. Векторлық элементтер Ньютон механикасының құрамдас бөлігі болып табылады. Бұл лекцияда біз векторлық алгебраның негіздеріне сүйеніп және механикада қозғалысты, күштерді және моменттерді сипаттау үшін векторлардың қалай қолданылатынын көреміз.

Жалпы салыстырмалылық теориясы (GR) механикасын және оның квазикеплер мәселесіне қатысын қамтитын физиканың терең аспектілері туралы тақырып қазіргі физиканың ең өзекті бағыттарының бірі болып табылады және оны түсіну сіздің ғылыми мансабыңызға айтарлықтай үлес қоса алады.

Біз зерттейтін бірінші негізгі аспект – 20 ғасырдың басында Альберт Эйнштейн ұсынған Жалпы салыстырмалылық теориясы (ЖСТ). Бұл теория біздің гравитация және кеңістік-уақыт туралы түсінігімізді өзгертті. Біз гравитациялық толқындар, кеңістік-уақыт қисықтығы және жалпы эквиваленттілік принципі сияқты негізгі ұғымдарды қарастырамыз.

ЖСТ механикасындағы векторлық элементтер. Жалпы салыстырмалылық механикасының негізгі құралдарының бірі векторлық элементтер болып табылады. Біз бұл элементтердің күшті гравитациялық өрістердегі және кеңістік-уақыттың қисаюындағы объектілердің С қозғалысын сипаттау үшін жалпы салыстырмалылықта қалай қолданылатынын зерттейміз. Бұл классикалық механика қолданылмайтын жағдайларда физика қалай жұмыс істейтінін түсінуге көмектеседі.

Квазикеплер есебі дегеніміз не және оның Ньютон механикасына қандай қатысы бар? Квази-кеплерлік мәселе – астродинамика мен ғарыштық механика есептерінің ерекше класы, планеталар сияқты үлкен аспан денелерінің маңындағы ғарыш объектілерінің қозғалысын талдау үшін қолданылады. Бұл лекцияда Ньютон механикасының векторлық элементтерінің Квазикеплер есебіне қалай қолданылатынын және олардың ғарыш аппараттарының қозғалысын басқаруға қалай көмектесетінін зерттейміз.

Сондай-ақ, ЖСТ механикасындағы квазикеплерлік есебін біз Ньютон механикасы контекстінде зерттелген тұжырымдамасының кеңейтілген моделін ұсынамыз. ЖСТ механикасының квазикеплерлік есепте векторлық элементтерді гравитациялық массалар маңындағы заттардың қозғалысын талдау үшін және қозғалысты модельдеу үшін қалай пайдалануға болатынын қарастырамыз. Бұл тек академиялық зерттеулерде ғана емес, ғылыми және инженерлік зерттеулерде де пайдалы болып табылады.

Кеплер есебі – сынақ денесінің потенциалдық энергиясы r радиус векторға кері пропорционал және сәйкесінше r^2 – әсерлесу күшіне кері пропорционал болатын орталық гравитациялық өрістегі қозғалысы туралы есеп болып табылады. Мұндай есепті, егер қозғалыстың екі векторлық интегралынан бірден бастасақ, оңай шешуге болады

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{p}], \qquad \vec{A} = \left[\frac{\vec{p}}{m}\vec{M}\right] - \frac{\gamma m m_0}{r}\vec{r}, \tag{1}$$

мұндағы $\vec{M}$ –импульс моменті және $\vec{A}$ –Лаплас векторы.

Шынында да, $\vec{M}$ вектордың сақталуынан орбита жазық қисық екені шығады. (1) өрнектегі Лаплас векторын екі жағынан $\vec{r}$ -ға скаляр көбейтсек

$$\left(\vec{r}\vec{A}\right) = \left(\vec{r}\left[\frac{\vec{p}}{m}\vec{M}\right]\right) - \gamma m m_0 r, \tag{2}$$

немесе

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\varphi}, \tag{3}$$

$$P = \frac{M^2}{\gamma m^2 m_0}, \qquad e = \frac{A}{\gamma m m_0}, \qquad \alpha = \gamma m m_0. \tag{4}$$

Есептің шешімі және мұндағы P – орбиталық параметр, e – орбиталық эксцентриситет, φ – полярлық бұрыш. (3) теңдеудің өзі – фокусы координаттардың бас нүктесінде болатын конустық қиманың теңдеуі.

$\vec{A}$ – векторы тұрақты болып табылады және негізгі ось бойымен фокустан перигелийге қарай бағытталған. Қозғалыстың мұндай интегралының, әсіресе потенциалы $U = \frac{\gamma m_0}{r}$ болатын өріс үшін, осы потенциалдың алдында кез келген белгісі бар пайда болуы қозғалыстың азғындауымен байланысты [1].

Егер жүйенің толық энергиясы E<0 болса, онда эксцентриситет $e<1$ болады. Яғни қозғалыс орбитасы эллипс түрінде және бұл қозғалыс финитті деп аталады. Эллипстің үлкен және кіші жартылай осі үшін келесі формулалар келесідей болады:

$$a=\frac{P}{1-e^2}=\frac{\alpha}{2|E|}, \qquad b=\frac{P}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \tag{5}$$

Энергияның рұқсат етілген ең төменгі мәні

$$E_{min}=-\frac{m\alpha^2}{2M^2}. \tag{6}$$

Сонымен қатар

$$e=\sqrt{1+\frac{2EM^2}{m\alpha^2}}, \tag{7}$$

эксцентриситет $e=0$ болғанда, эллипс қимасы шеңберге айналады. Эллипстің жарты үлкен осі сынақ денесінің моментіне емес тек энергияға тәуелді екенін ескереміз. Ал T қозғалыс периоды мынадай қатынастарды қанағаттандырады

$$2mf=TM, \quad T=2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}=\pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}, \tag{8}$$

мұндағы $f=\pi ab$ – орбитаның ауданы. Енді Квазикеплер есебін қарастырамыз, ол үшін орталық өрістегі қозғалыстың жалпы мәселесі туралы талқылаудан бастаймыз. Сынақ денесінің потенциалдық энергиясы тек r қашықтыққа тәуелді және мұндай өрісте қозғалған кезде жүйенің өрістің ортасына қатысты моменті сақталады

$$\vec{M}=[\vec{r}\vec{p}]. \tag{9}$$

Бұл орталық өрістегі сынақ денесінің траекториясы толығымен бір жазықтықта жатқанын білдіреді. Оған r, φ полярлық координаталарды енгізіп, Лагранж функциясын түрінде жазамыз

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)-U(r). \tag{10}$$

Онда φ координатасы нақты түрі көрсетілмейді, бұл жағдайда циклдік болады және сәйкесінше импульсы сақталады

$$p_\varphi=M=mr^2\dot{\varphi}=const. \tag{11}$$

Сынақ денесінің орталық өрістегі қозғалысы туралы есептің шешімін қозғалыс теңдеулерінің өзін жазбай-ақ, импульс пен энергияның сақталу заңдарына сүйене отырып алуға болады. Энергияның сақталу заңын жазамыз

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + U(r). \tag{12}$$

(11) теңдеуіндегі $\dot{\varphi}$ орнына мәнін қойып

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r). \tag{13}$$

Одан ары қарай

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2r^2}}\,. \tag{14}$$

Айнымалыларды ажыратып интегралдау тәсілі арқылы біз жаза аламыз

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + \text{const}. \tag{15}$$

(11)-ден табамыз

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt\,. \tag{16}$$

Мұнда (14) dt мәнін қойып, интегралдасақ, бізде:

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left[E - U(r)\right] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const}. \tag{17}$$

(15) және (17) формулалар орталық өрістегі сынақ денесінің қозғалысы туралы есептің шешімін жалпы түрде береді. Бұл жағдайда (17) r және φ айнымалылары арасындағы байланысты анықтайды, яғни. траектория теңдеуін береді. (15) өрнегі уақыт функциясы ретінде қозғалатын сынақ денесінің центрден r қашықтығын жасырын түрде анықтайды. φ бұрышы уақыт бойынша монотонды түрде өзгереді және $\dot{\varphi}$ – (11) теңдеуде көрініп тұрғандай таңбасынан ешқашан таңбасын өзгертпейді. Қозғалыстың радиалды бөлігін «тиімді» потенциалдық энергиясы бар өрістегі бір өлшемді қозғалысы ретінде қарастыруға болады.

$$U_{эфф} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}\,. \tag{18}$$

$\dfrac{M^2}{2mr^2}$ – шамасын центрдентепкіш энергия деп атайды. Энергияның сақталу заңына (13) $\dot{r} = 0$ қойсақ, онда

$$E = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \tag{19}$$

Бұл өрнек орталықтан қашықтығы бойынша қозғалыс шекараларын анықтайды. Бұл жағдайда $\dot{r} = 0$ шарты $r(t)$ функциясының өсуден кемуге және керісінше қозғалатын траекторияның «бұрылу нүктесін» анықтайды.

Егер r өзгеру аймағының r_{min} және r_{max} екі шекарасы болса және [1] сәйкес, қозғалыс финитті болады және траектория толығымен радиустары $r = r_{max}$ мен $r = r_{min}$ шеңберлерімен шектелген сақинаның ішінде жатады. Бұл траектория міндетті түрде тұйық қисық болады дегенді білдірмейді. Яғни, радиус векторы r – r_{max} -ден r_{min} -ге, содан кейін r_{max} -ге ауысатын уақыт ішінде радиус векторы (17) сәйкес Δφ бұрышы арқылы айналады дегенді білдіреді

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E-U) - \frac{M^2}{r^2}}}. \tag{20}$$

Траекторияның тұйықталуының шарты мынада: бұл бұрыш 2π рационал бөлігіне тең, яғни $\Delta\varphi = 2\pi m/n$ болды, мұндағы m, n бүтін сандар.

Финитті қозғалыстардың барлық траекториялары тұйықталған орталық өрістердің тек екі түрі бар. Бұл потенциалдық энергиясы $\frac{1}{r}$ немесе r^2 пропорционал болатын өрістер. Бірінші типтегі өріс Кеплер есебіне сәйкес келеді, ал екінші типтегі өріс кеңістіктік осциллятор деп аталатын есеп жағдайында пайда болады.

Енді орталық өрістегі қозғалыс туралы жалпы пайымдауымызды нақтырақ етіп, сынақ денесінің потенциалдық энергиясы пішінге ие болғанда мәселені қарастырайық

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \delta U(r), \tag{21}$$

Мұндағы $\delta U(r)$ аздаған қосымша болып табылады. Мұндай есепті квазикеплерлік есеп деп атауға болады. Бұл жағдайда финиттік қозғалыс траекториялары тұйықталуын тоқтатады және әрбір айналымда орбиталық перигелий δφ аз бұрыштық мәніне ығысады. Сонымен, (20) сәйкес

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}} = -2\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}}\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}dr, \qquad (22)$$

Мұны (21) орнына қойып әрі қарай есептеулер жүргізу үшін алдымен өрнекті қарастырамыз

$$\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}} = \sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}-\delta U(r)\right)-\frac{M^2}{r^2}} \approx$$

$$\approx \sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{r^2}} - \frac{m\delta U(r)}{\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{r^2}}}. \qquad (23)$$

Бұл өрнекті (22)-ге қойып

$$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{2m\delta U(r)dr}{\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{2m}{M}\int_0^{\pi} r^2\delta U(r)\,d\varphi\right), \qquad (24)$$

Оны dr бойынша интегралдап «ұйытқымаған» Кеплерлік қозғалыстың траекториясы бойынша $d\varphi$ интегралдауға көштік. (24) және (16) сәйкес екенін ескеріп

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt. \qquad (25)$$

Алынған мәнді (24)- ке қоямыз

$$\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M}\int_0^T \delta U(r)dt. \qquad (26)$$

Эллипс «бүтін» ретінде айналатындықтан, оған $\vec{\Omega}$ бұрыштық жылдамдықты тағайындау арқылы (мысалы, перигелийдің айналу жылдамдығы) біз жаза аламыз

$$\Delta\varphi = \Omega \cdot T, \qquad (27)$$

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial M}\frac{1}{T}\int_0^T \delta U(r) dt, \tag{28}$$

өйткені T периоды қозғалыстың тәуелсіз интегралы E ғана тәуелді. Қорытындылай келе, біз тағы бірнеше формулаларды ұсынамыз. Кеплер қозғалысы жағдайында E тәуелсіз интегралы, (5)-ден көрініп тұрғандай, мынаған тең

$$E = -\frac{\alpha}{2a}, \tag{29}$$

мұндағы a –эллипстің үлкен жарты осі. Келесідей M_0 жаңа шаманы енгізейік

$$a = \frac{M_0{}^2}{m\alpha}. \tag{30}$$

Оның үстіне M_0, оның «әрекет» өлшемі бар. Содан кейін,

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2M_0{}^2}. \tag{31}$$

Бұл өрнекті (7) орнына қойып, аламыз

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1-\frac{A^2}{\alpha^2}}}. \tag{32}$$

Сонымен, E энергияның сақталу заңына байланысты түсіндірілетін M_0 қозғалыс интегралы мен қозғалыстың қалған M және A интегралдары арасында (32) өрнек арқылы анықталатын байланыс бар. Сонымен, орташа қозғалыс деп аталатын [2]

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{m\alpha^2}{M_0{}^3} = \frac{\partial E}{\partial M_0}. \tag{33}$$

(28), (32) және (33) формулалары ЖСТ механикасында денелер қозғалысының адиабаталық теориясын құруда маңызды рөл атқарады [3].

Қолданылған әдебиет

1. Fock V. Zur Schrodingerishen Wellenmechanik // Ztschr. Phys. 1926. Bd. 38. S. 242-250.
2. Klein O. Quantentheorie und funfdimensionale Relativitatstheorie // Ibid. Bd. S. 895.
3. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимо

действий. Ч. 2. Теория физических взаимодействий. М.: Изд-во МГУ, 1998. 448 с.